数理解析研究所講究録
182巻 1973年 36-52

ある種の半単純リー群上の調和解析

広島大 教養　　江口　正晃

§1. 序

この講演は［3］の紹介である。

n次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の Fourier 変換の理論は周知の様に微分方程式論、関数解析等において最も有用な武器の一つである。リー群上の Fourier 変換の理論を構成することはG上の微分方程式、関数解析・特殊関数・数論・理論物理学等と深い係り合いを持つ。$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}f = \tilde{f}$ は次で定義される（測度は適当に正規化しておく）

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle} dx.$$

次にのべる Schwartz の定理、Plancherel の定理は Paley-Wiener の定理と並んで Fourier 解析の主要な定理である。

(1)　(Schwartz の定理) [13(a),(b)].　$\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ および $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$ をそれぞれ $\mathbb{R}_x^n$ 及び $\mathbb{R}_\xi^n$ 上の急減少関数のつくる位相線型空

間とするとき Fourier 変換 $\mathcal{F}: f \to \tilde{f}$ （$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$）は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$ の上への同型対応である。

（2）（Plancherel の定理）．L^2 ノルムに関し $\mathcal{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ から $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ の上への等長変換に拡張される。

半単純リー群 G 上で Fourier 変換の理論を構成することはユニタリ表現論の課題の一つであるが、[18] にものべられているように G 上の Fourier 変換の理論を構成するには (i) $\mathbb{R}^n_\xi$ に相当する既約ユニタリ表現の空間 $\hat{G}$ を決定すること（既約表現の分類）．(ii) $e^{-i\langle x, \xi\rangle}$ に相当する G 上の特殊関数を構成すること．(iii) $\mathbb{R}^n_\xi$ 上の測度 $d\xi$ に相当する $\hat{G}$ 上の Plancherel 測度を決定することが必要である。

一般に von Neumann の意味の I 型の群にたいする Plancherel 測度の存在がわかっている（辰馬 [15]）が Schwartz の定理、Paley - Wiener の定理を考える際にはこの一般論では不十分であって、もっと詳しい性質を調べる必要がある。従って Plancherel 測度の実際型が必要である。

$L^2(G)$ の分解において G の離散系列の既約ユニタリ表現と、有限個の連続系列の既約ユニタリ表現が係る．G の Cartan 部分群の共役類の個数が 1（$N(G) = 1$ とかく）の場合は唯一個の連続系列の表現（主系列の表現と呼ばれる）だけが関係する。$N(G) = 1$ の場合には Harish-Chandra [6(g)] が G の

real rank が 1 の場合に得た方法で，即ち指標公式から部分積分を用いて得た方法で Plancherel 測度を具体的に決定することが出来る。

さて我々は G 上の Fourier 変換を定義し，Schwartz の定理の類似を考えたい．ユークリッド空間上の理論がそうである様に Fourier 変換は 急減少関数の空間 = Schwartz 空間 において"最もきれいな"形をとるべきであると考える。G上の Schwartz 空間としてどの様な関数空間をとるかが一つの問題である。我々は Harish-Chandra [6(m)] による定義を採用し，その Fourier 像の特徴づけを考える。我々の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ が G上の Schwartz 空間 $\mathcal{C}(G)$ から $\hat{G}$ 上のある種の急減少関数（作用素）の空間 $\mathcal{C}(\hat{G})$ の上への同型対応を与えることがわかる． これらの Schwartz 空間はそれぞれ $L^2(G)$ 及び $L^2(\hat{G})$ に稠密に含まれ，従って Schwartz の定理の系として Plancherel の定理が得られる。

一般の半単純リー群 G上の Schwartz空間の部分空間 (i) G の極大コンパクト群Kに関して両側不変な関数のつくる空間 $\mathcal{C}(K\backslash G/K)$, (ii) Kに関して片側不変な関数のつくる空間 $\mathcal{C}(G/K)$ ，の Fourier 像の決定の問題（Plancherel の定理も含めて）に対して，(i) については Harish-Chandra [6,(h),(i),(m)] - Helgason [7(b)] の，そして (ii) については 江口－岡本［４］の結果

がある。 K不変性の条件がある場合はGの表現が"Kに関してクラス1"([18]参照)であることが対応して理論が多少簡単になる. それに比べ一般の場合はかなり複雑となる。

Schwartzの定理はGのreal rank = 1の場合にJ.G. Arthur [1]により解決された。 Harish-ChandraによるPlancherel測度の実際型を用いるのである. 我々の場合(i.e. $\mathcal{N}(G)=1$)もGのreal rank = 1の場合も$\mathcal{F}$がsurjectiveであることを証明する為にG/Kの場合の帯球関数に対応するEisenstein積分(G上の左不変な微分作用素のなすalgebraの中心の固有関数)の無限遠点での漸近行動とPlancherel測度との関係を調べる必要が出てくる. Gのreal rank = 1の場合はこの条件が効いてEisenstein積分のconstant term([6(l)]参照)(: Weyl領域の壁から十分離れたところでの漸近行動)をしらべることで十分であるが、我々の場合それだけでは不十分であり, 壁に沿っての漸近行動を調べねばならない。(壁の上と外では微分方程式系が異る). 我々はこれをHarish-Chandra [6(m)]の方法を用いてGのreal rankに関する帰納法で証明出来る. この方法は一般に2個以上の連続系列の表現がかかわってくる場合従って一般の半単純リー群G上のSchwartzの定理を証明する際に役立つと思われる。

§2. 準備

Gを中心有限の連結、非コンパクト型実半単純リー群とする。$\mathfrak{g}$をGのリー環とする。この報告においてはGのCartan部分群の共役類の個数は1である場合で更に$\mathfrak{g}$はいかなる複素構造も持たない場合を考える。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を1つのCartan分解とし対応するCartan involutionをθとかく。$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$を$\mathfrak{p}$の1つの極大可換部分空間とし、その双対空間を$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$で表わす。$\mathfrak{a}$を、$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$を含む様な$\mathfrak{g}$のCartan部分環とし、$\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k}$とおく。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$及び$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$はそれぞれ$\mathfrak{g}$及び$\mathfrak{a}$の複素化を表わし、$\Delta$は$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$に関するnon-zero rootsの集合を表わす。今Δに$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$に関してcompatibleな1つの線型順序を入れておく。このときΔ_+及びP_+はそれぞれ、正のroots全体の集合及び正のrootsで$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$上消えないもの全体の集合を示すものとする。$P_-=\Delta_+-P_+$とする。$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in P_+}\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}}$，$\mathfrak{n}=(\sum_{\alpha\in P_+}\mathfrak{g}^{\alpha})\cap\mathfrak{g}$とおく。但しここで$\mathfrak{g}^{\alpha}$は

$$\mathfrak{g}^{\alpha}=\{X\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\mid[H,X]=\alpha(H)X,\quad H\in\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}\}.$$

で定義される。各$\alpha\in\Delta_+$に対して$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$の元$H_\alpha$を$B(H_\alpha,H)=\alpha(H)$がすべての$H\in\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$に対し成り立つ様に定める。ここにBは$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のKilling形式を$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$に制限したものを表わす。$\varpi=\prod_{\alpha\in\Delta_+}H_\alpha$，$\varpi^{\mathfrak{m}}=\prod_{\alpha\in P_-}H_\alpha$とおくとこれらは$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$

上の多項式関数と思える。K, A_+, N をそれぞれ $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{n}$ に対応する G の解析的部分群とする。M, M' はいつもの様に $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ の K における中心化群および正規化群を表わす。有限群 $W = M'/M$ は Weyl 群と呼ばれる。A を $\mathfrak{a}$ の G における中心化群とし、$A_- = A \cap K$ とおく。この時 A 及び A_- は G 及び M の Cartan 部分群である。$P = MA_+N$ とおくと P は G の極小放物型部分群である。$\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ 上の実線型関数 μ で $\xi_\mu(\exp H) = e^{\mu(H)}$ $(H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}})$ で定義される ξ_μ が A_- の指標を与える様なものの作る格子を Π で表す。各 $\alpha \in P_-$ に対し $\mu(H_\alpha) \neq 0$ となる様な $\mu \in \Pi$ の全体を Π' で表わす。M の既約ユニタリ表現の同値類を $\mathcal{E}_M$ とかく。この時 $\mathcal{E}_M$ は Π' で parametrize 出来る。$\sigma \in \mathcal{E}_M$ がある $\mu \in \Pi'$ により parametrize 出来ているとき $|\sigma|^2 = B(\mu, \mu)$ とおく。K の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の集合を $\mathcal{E}_K$ で表わす。このとき $\mathcal{E}_K$ もまた Π' の元により parametrize される。もし $\tau \in \mathcal{E}_K$ が $\nu \in \Pi'$ で parametrize されているとき $|\tau|^2 = B(\nu, \nu)$. とおく

$\sigma \in \mathcal{E}_M$ が有限次元ヒルベルト空間 V_σ 上に作用していると仮定し、$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ に対して G 上の誘導表現 $\pi_{\sigma,\lambda}$ を次で定義する。

$$\sigma\lambda = \operatorname*{Ind}_{M \times A_+ \uparrow P} (\sigma, \lambda), \quad \pi_{\sigma,\lambda} = \operatorname*{Ind}_{P \uparrow G} \sigma\lambda .$$

$\pi_{\sigma,\lambda}$ は次の条件で定まるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ 上の G のユニタリ表現である。$\mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ は次にのべる条件を満す様な G 上の V_σ に値をもつ関数 Φ の全体の集合である。(i) $\Phi(x\xi^{-1}) = (\sigma\lambda)(\xi)\Phi(x)$, $x \in G$, $\xi \in P$, (ii) $\Phi(k)$ は K 上の Borel 関数である, (iii) $\int_K |\Phi(k)|^2 dk < +\infty$. $\mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ の内積は

$$(\Phi, \Psi) = \int_K (\Phi(k), \Psi(k))_{V_\sigma} dk, \qquad \Phi, \Psi \in \mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$$

で与えられる。ここで $(\cdot,\cdot)_{V_\sigma}$ は V_σ における内積を示す。$\Phi \in \mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ に対して $\pi_{\sigma,\lambda}\Phi$ は

$$(\pi_{\sigma,\lambda}(y)\Phi)(x) = \Phi(y^{-1}x)\, e^{-\rho(H(y^{-1}x)) + \rho(H(x))}, \quad x, y \in G.$$

で定義される。ここに $x \in G$ に対して $H(x)$ は G の岩沢分解により $x = \kappa(x)\exp H(x)\cdot n(x)$, $\kappa(x) \in K$, $\exp H(x) \in A_+$, $n(x) \in N$ で定まる $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ の元を表す。

各 $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ 及び $\Phi \in \mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ に対して $\hat{\Phi} = \Phi|K$ (Φ の K への制限) とおく。これにより $\mathcal{H}_{\sigma,\lambda}$ は、K 上の V_σ に値をとる2乗可積分関数のつくるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\sigma$ と同一視出来る。

各 $s \in W$ は M の自己同型を引きおこす.(内部自己同型をのぞいて)。従って s は $s: \sigma \to s\sigma$ なる $\mathcal{E}_M$ からそれ自身の上への全単射を引きおこす。$\lambda \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ が正則なら $\pi_{\sigma,\lambda}$ と $\pi_{s\sigma,s\lambda}$ は同値であることが知られている。$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ の正則元の

全体を $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{*\prime}$ で表す。 各 $\sigma \in \mathcal{E}_M$ 及び $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{*\prime}$ に対して表現 $\pi_{\sigma,\lambda}$ と $\pi_{s\sigma, s\lambda}$ との間のユニタリ intertwining operator $N_\sigma^s(\lambda)$ を一つ固定する。 即ちこのとき

$$N_\sigma^s(\lambda)\,\pi_{\sigma,\lambda}(x)\,N_\sigma^s(\lambda)^{-1} = \pi_{s\sigma, s\lambda}(x), \quad x \in G$$

が成り立つ。

§3. 指標公式

各 $\mu \in \Pi'$ 及び $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ に対して $\varpi(\mu, \lambda)$ を次式で定義する。

$$\varpi(\mu, \lambda) = \varpi(\mu + i\lambda)$$

$\sigma \in \mathcal{E}_M$ 及び $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ に対して $\Theta_{\sigma,\lambda}$ は表現 $\pi_{\sigma,\lambda}$ の指標を表わす。

補題. $\mathcal{E}_M \times \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ 上の非負値関数 $\beta(\sigma, \lambda)$ を適当な定数 c に対して

$$\beta(\sigma, \lambda) = c \cdot \varpi(\mu, \lambda), \quad \sigma = \sigma(\mu) \in \mathcal{E}_M, \ \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*.$$

で定めれば $f \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$f(1) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_M} \int_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{*+}} \beta(\sigma, \lambda)\, \Theta_{\sigma,\lambda}(f)\, d\lambda$$

が成り立つ。 ここで $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{*+}$ は $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ の正の Weyl 領域を表し $d\lambda$ は $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ 上の適当に正規化された測度を表わす。

（即ち $\beta(\sigma, \lambda)$ が我々の群 G に対する Plancherel 測度であ

4.4

3)。

$h_- \in A_-$, $h_+ \in A_+$ で $h = h_- h_+$ が A の正則元であるとき

$$\Delta(h) = \xi_\rho(h) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - \xi_\alpha(h)^{-1})$$

とおく。 ここで ξ_ρ 及び ξ_α は

$$\xi_\rho(\exp H) = e^{\rho(H)}, \quad \xi_\alpha(\exp H) = e^{\alpha(H)}, \quad H \in \mathfrak{a}^{c}$$

となる様なA上の指標を表す. $m = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \mathrm{rank}\,\mathfrak{g})$ とおく。 $G^* = G/A$ とし dx^* を G^* 上の G-不変測度とする。 $f \in C_c^\infty(G)$ に対し

$$F_f(h) = \Delta(h) \int_{G^*} f(x^* h x^{*-1})\, dx^*, \quad h \in A',$$

とおく。 ここで A' は A の正則元の集合を表わす。

定理1. 適当な定数 $c_0 > 0$ がとれて各 $f \in C_c^\infty(G)$ に対して次式が成りたつ。

$$\Theta_{\sigma,\lambda}(f) = c_0 (-1)^m (\mathrm{sign}\, \varpi^m(\mu)) \int_{A_- \times A_+} F_f(h_- h_+) \xi_\mu(h_-) e^{-i\lambda(\log h_+)} dh_- dh_+.$$

ここで dh_-, dh_+ はそれぞれ A_-, A_+ 上の適当に正規化された Haar 測度を表わし, $\log h_+ = H(h_+)$ である。

各 $\sigma\in\mathcal{E}_M$ に対して $\mathcal{H}_2(\sigma)$ で $\mathcal{H}_\sigma$ 上のヒルベルト・シュミット・ノルム $\|\cdot\|_2$ を持つヒルベルト・シュミット作用素のつくる空間を表わす。

次の条件 (i) 〜 (iv) を満す $\mathcal{E}_M\times\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ 上の $\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{E}_M}\mathcal{H}_2(\sigma)$ に値をもつ関数の集合を $L^2(\hat{G})$ で表わす。

(i) 各 $\sigma\in\mathcal{E}_M$ 及び $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$ に対して $a(\sigma,\lambda)\in\mathcal{H}_2(\sigma)$,

(ii) $a(s\sigma,\ s\lambda) = N_\sigma^s(\lambda)\,a(\sigma,\lambda)\,N_\sigma^s(\lambda)^{-1}$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$, $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{*\prime}$, $s\in W$,

(iii) 各 $\sigma\in\mathcal{E}_M$ に対して $a(\sigma,\lambda)$ は λ の Borel 関数である.

(iv) W の位数を ω とするとき.

$$\|a\|^2 = \frac{1}{\omega}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_M}\int_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*}\|a(\sigma,\lambda)\|_2^2\ \beta(\sigma,\lambda)\,d\lambda < +\infty .$$

このとき容易にわかる様に $L^2(\hat{G})$ はヒルベルト空間となる。$f\in C_c^\infty(G)$ に対し $\hat{f}$ を次式で定義すれば $\hat{f}\in L^2(\hat{G})$ である。

$$\hat{f}(\sigma,\lambda) = \int_G f(x)\,\pi_{\sigma,\lambda}(x)\,dx \quad , \quad \sigma\in\mathcal{E}_M,\ \lambda\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^* .$$

$C_c^\infty(G)$ から $L^2(\hat{G})$ への写像 $\mathcal{F}: f\to\hat{f}$ を Fourier 変換という。

§4. Schwartz 空間とその Fourier 変換.

各 $x\in G$ に対して G 上の球関数 $\Xi(x)$ を次式で定義する。

$$\Xi(x) = \int_K e^{-\rho(H(xk))}\,dk .$$

$G = KA_+K$ (Cartan 分解) とかけるから

(i) $\sigma(k_1 x k_2) = \sigma(x)$, $k_1, k_2 \in K$, $x \in G$

(ii) $\sigma(\exp H) = B(H, H)^{\frac{1}{2}}$, $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$

を満すG上の関数が唯一つ定まる。

各 $g_1, g_2 \in \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ はG上の左G－不変な微分作用素のつくる algebra とし、$\mathfrak{B}$ は G右不変な微分作用素のつくる algebra と同型である) 及び $s \in \mathbb{R}$ に対し $C^\infty(G)$ 上の semi-norm を次で定義する.

$$|f|_{g_1, g_2, s} = \sup_{x \in G} |f(g_1 : x ; g_2)|\, \Xi(x)^{-1}(1+\sigma(x))^s, \quad f \in C^\infty(G).$$

$$\mathcal{C}(G) = \{ f \in C^\infty(G) : |f|_{g_1, g_2, s} < +\infty, \text{ for } {}^\forall g_1, g_2 \in \mathfrak{B},\ s \in \mathbb{R} \}$$

とおく。このセミノルム系により $\mathcal{C}(G)$ は Fréchet 空間である。$\mathcal{C}(G)$ を G の Schwartz 空間という。各 inclusions

$$C_c^\infty(G) \subset \mathcal{C}(G) \subset L^2(G)$$

はそれぞれの位相に関して連続であることが知られる.

(τ, V_τ), (σ, V_σ) をそれぞれ次元が t 及び s の K及び Mの既約ユニタリ表現とする。$\tau|M$ で τ の M への制限を表わし $R(\tau, \sigma)$ で $\tau|M$ と σ に対する V_τ から V_σ への intertwinig operators の集合を表わす。ヒルベルト－シュミット・ノルムにより $[\tau : \sigma]$ (= σ の $\tau|M$ での重複度) 次元のヒル

ベルト空間となる。

V_τ の正規直交基底 $\{\xi_1, \cdots, \xi_t\}$ を一つ固定し、$k \in K$ にたいして $\tau^*(k) = \tau(k^{-1})$ とおく。ノルムが $t^{\frac{1}{2}}$ に等しい $R(\tau, \sigma)$ の一つの正規直交基底 $\{T_1, \cdots, T_r\}$ を固定する。$1 \leqq l \leqq r$, $1 \leqq j \leqq t$, $k \in K$ に対し

$$\Phi_{\tau,\,(l-1)t+j}(k) = T_l\,(\tau^*(k)\,\xi_j)$$

とおく。このとき $\{\Phi_{\tau, i} : \tau \in \mathcal{E}_K,\ 1 \leqq i \leqq [\tau\cdot\sigma]\cdot\dim\tau\}$ は $\mathcal{H}_\sigma$ の一つの正規直交基底をなす。

次の条件 (i) ～ (iii) を満す $\mathcal{E}_M \times \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ 上の $\mathcal{H}_2(\sigma)$ に値をもつ関数 $a(\sigma, \lambda)$ の集合を $\mathcal{C}(\hat{G})$ で表わす。

(i) 各 $\sigma \in \mathcal{E}_M$ に対して $a(\sigma, \lambda)$ は $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ 上の行列値 C^∞ 関数である,

(ii) $a(s\sigma, s\lambda) = N_\sigma^s(\lambda)\, a(\sigma, \lambda)\, N_\sigma^s(\lambda)^{-1}$, $\sigma \in \mathcal{E}_M$, $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^{*\prime}$, $s \in W$,

(iii) 各多項式の組 (p_1, p_2, q_1, q_2) 及び $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ 上の定数係数の微分作用素 d に対して

$$|a|_{(p_1, p_2, q_1, q_2 : d)}$$

$$= \sup_{\lambda \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*} \left| d_\lambda(\Phi_{\tau_1, i_1},\ a(\sigma, \lambda)\,\Phi_{\tau_2, i_2}) \right| p_1(|\sigma|)\,p_2(|\lambda|)\,q_1(|\tau_1|)\,q_2(|\tau_2|) < +\infty.$$

この時このセミノルム系は $\mathcal{C}(\hat{G})$ 上に位相を定義し $\mathcal{C}(\hat{G})$ は

この位相に関して Fréchet 空間となる。 $\mathcal{C}(\hat{G})$ は $L^2(\hat{G})$ に稠密に含まれる。

定理 2. Fourier 変換 $\mathcal{F}: f \to \hat{f}$ は $\mathcal{C}(G)$ から $\mathcal{C}(\hat{G})$ 上への位相同型となる。

上にのべた事に注意すれば

定理 3. (Plancherel の定理). Fourier 変換 $\mathcal{F}$: $f \to \hat{f}$ ($f \in \mathcal{C}(G)$) は一意的に $L^2(G)$ から $L^2(\hat{G})$ 上への等長変換に拡張される。

また $\mathcal{C}(G)$ 及び $\mathcal{C}(\hat{G})$ の strong dual を $\mathcal{C}'(G)$ 及び $\mathcal{C}'(\hat{G})$ とし、Fourier 変換 $\mathcal{F}$ の逆の転置を考えると次の定理が得られる。 $\mathcal{F}$ の逆の転置を $(\mathcal{F}^{-1})^*$ で表わす。

定理 4. 写像 $(\mathcal{F}^{-1})^*$ は $\mathcal{C}'(G)$ から $\mathcal{C}'(\hat{G})$ 上への位相同型である。

文 献

1. J. G. Arthur, Harmonic analysis of tempered distributions on semisimple Lie groups of real rank one, Ph. D. Thesis, Yale University, 1970.
2. F. Bruhat, Sur les représentations induits des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France, 84(1956), 97-205.
3. M. Eguchi, Harmonic analysis on some types of semisimple Lie groups, (to appear in Proc. Japan Acad.)
4. M. Eguchi and K. Okamoto, The Fourier transform of the Schwartz space on a symmetric space (to appear in Proc. Japan Acad.)
5. M. Eguchi, M. Hashizume and K. Okamoto, The Paley-Wiener theorem for distributions on symmetric spaces, Hiroshma Math. J., 3(1973), (to appear)
6. Harish-Chandra,
   (a) Representations of a semisimple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. Math. Soc., 75(1953), 185-243.
   (b) Representations of semisimple Lie groups II, Trans. Amer. Math. Soc., 76(1954), 26-65.
   (c) Representations of semisimple Lie groups III, Trans. Amer. Math. Soc., 76(1954), 234-253.
   (d) Representations of semisimple Lie groups VI, Amer. J. Math., 78(1956), 564-628.
   (e) The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 83(1956), 98-163.

(f) Fourier transforms on a semisimple Lie algebra I, Amer. J. Math., 79(1957), 193-257.

(g) A formula for semisimple Lie groups, Amer. J. Math., 79(1957), 733-760.

(h) Spherical functions on a semisimple Lie group I, Amer. J. Math., 80(1958), 241-310.

(i) Spherical functions on a semisimple Lie group II, Amer. J. Math., 80(1958), 553-613.

(j) Some results on an invariant integral on a semisimple Lie algebra, Ann. of Math., 80(1964), 551-593.

(K) Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., 119(1965), 457-508.

(l) Two theorems on semisimple Lie groups, Ann. of Math., 83(1966), 74-128.

(m) Discrete series for semisimple Lie groups II, Acta Math., 116(1966), 1-111.

(n) Harmonic analysis on semisimple Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., 76(1979), 529-551.

(o) On the theory of the Eisenstein integral, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Varlag, 266(1971), 123-149.

7. S. Helgason

(a) Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.

(b) Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces, Amer. J. Math., 86(1964), 565-601.

(c) A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., 5(1970), 1-154.

(d) Paley-Wiener theorems and surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces and Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., 79(1973), 129-132.

(e) Function theory on symmetric spaces, Lecture note, Summer institute on harmonic analysis on homogeneous spaces, 1972 (preprint)

(f) The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I, Ann. of Math. (to appear)

8. N. Jacobson, Lie algebra, Interscience, 1962.

9. G. W. Mackey.

(a) Induced representations on locally compact groups I, Ann. of Math., 55(1952), 101-139.

(b) Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc., 85(1957), 134-165.

10. G. D. Mostow, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of Math., 52(1950), 606-636.

11. H. Ozeki and M. Wakimoto, On polarizations of certain homogeneous spaces, Hiroshima Math. J., (1973),

12. P. J. Sally and G. Warner, The Fourier transform of invariant distributions, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 266(1971), 297-320.

13. L. Schwartz,

(a) Théorie des distributions I, Hermann, Paris, 1957

(b) Théorie des distributions II, Hermann, Paris, 1957

14. M. Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 11(1959), 374-434.

15. 辰馬伸彦, 局所コンパクト群に対する一般論 数学, 19-4(1968), 251-255

16. P. Trombi, On the continuous spectrum for a semisimple Lie group, Seminar note, Summer institute on harmonic analysis on homogeneous spaces, 1972 (preprint)

17. G. Warner,

(a) Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

(b) Harmonic analysis on semi-simple Lie groups II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

18. 吉沢尚明, ユニタリ表現概論 数学, 19-4(1968), 194-204.